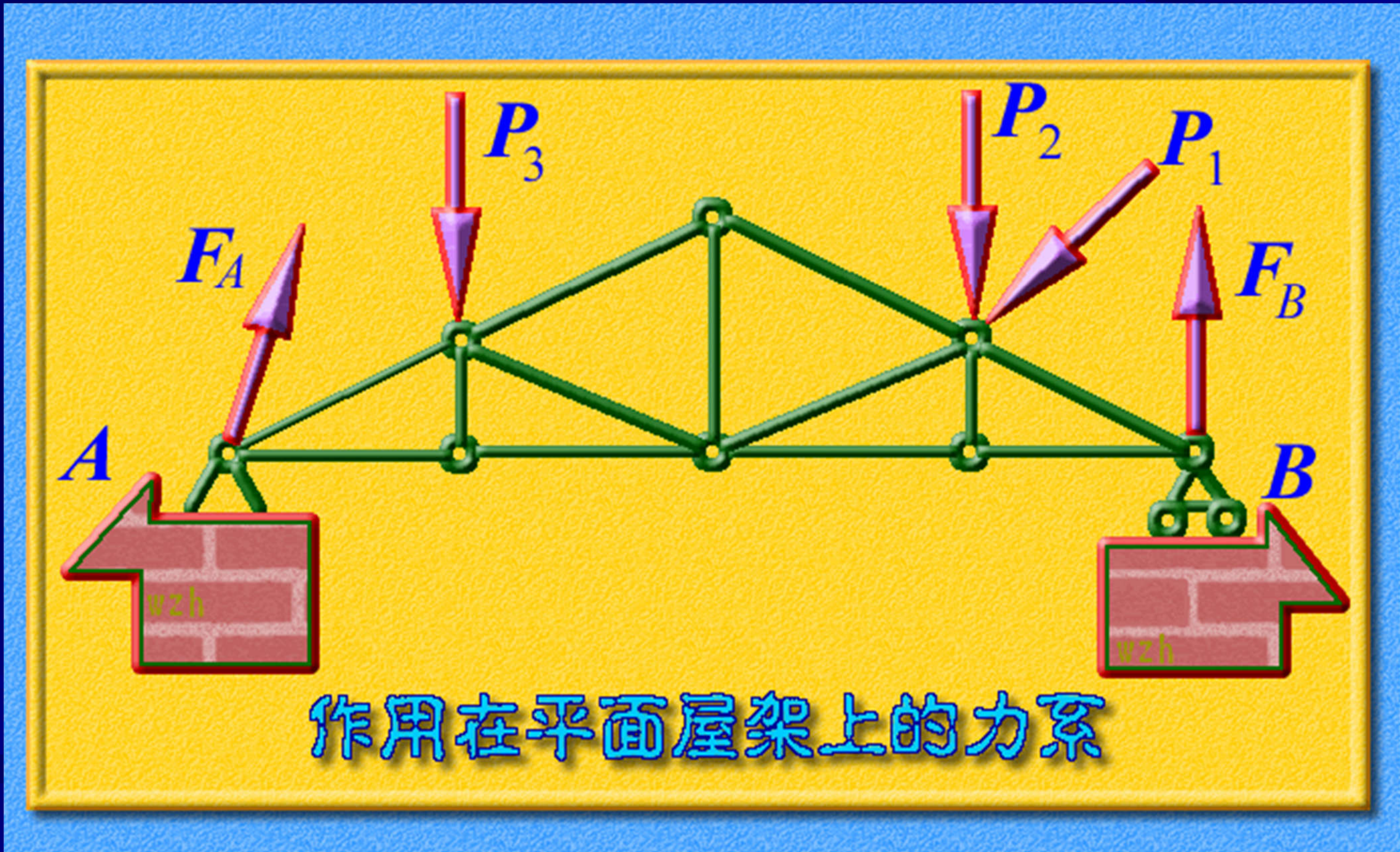
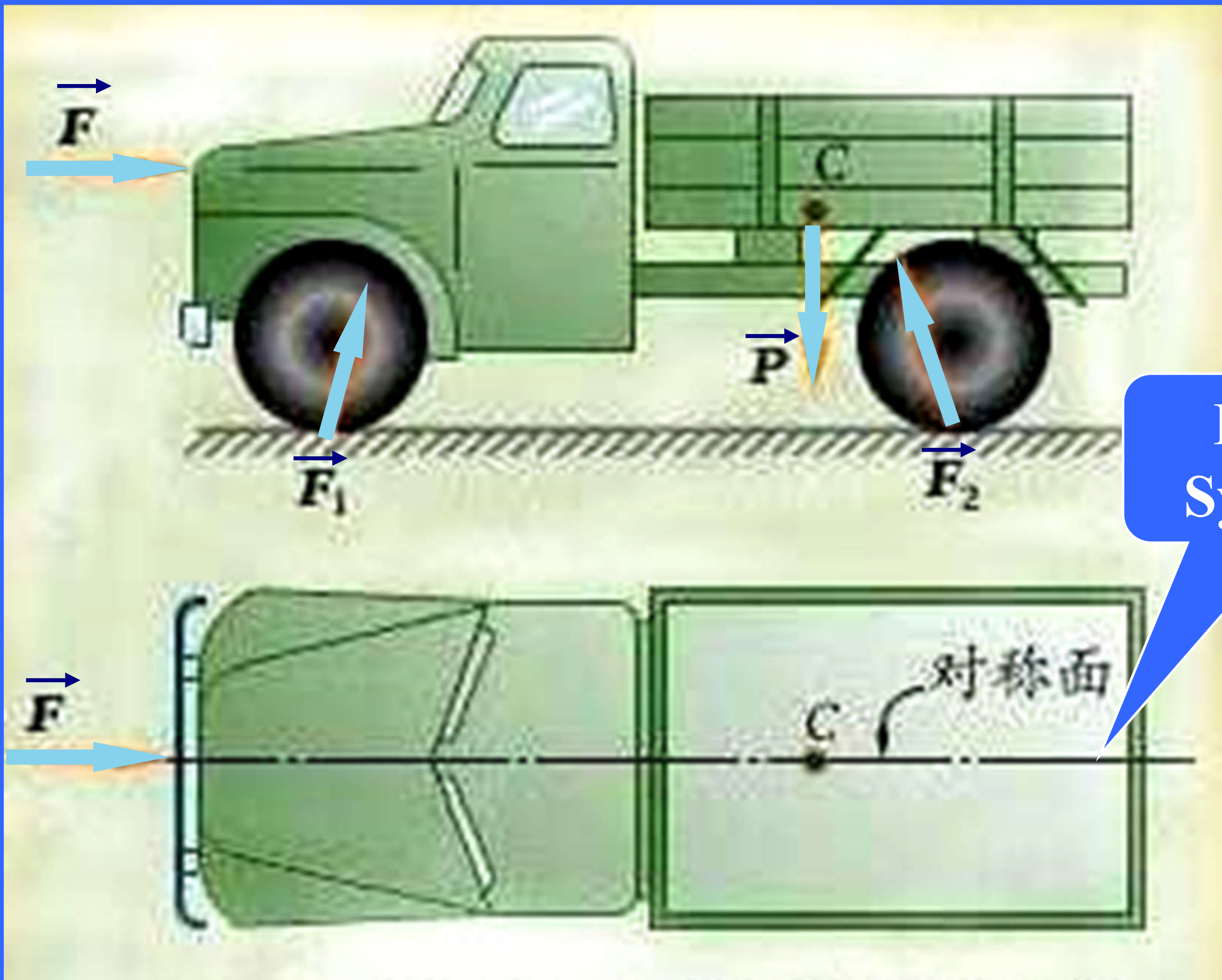
# 平面任意力系

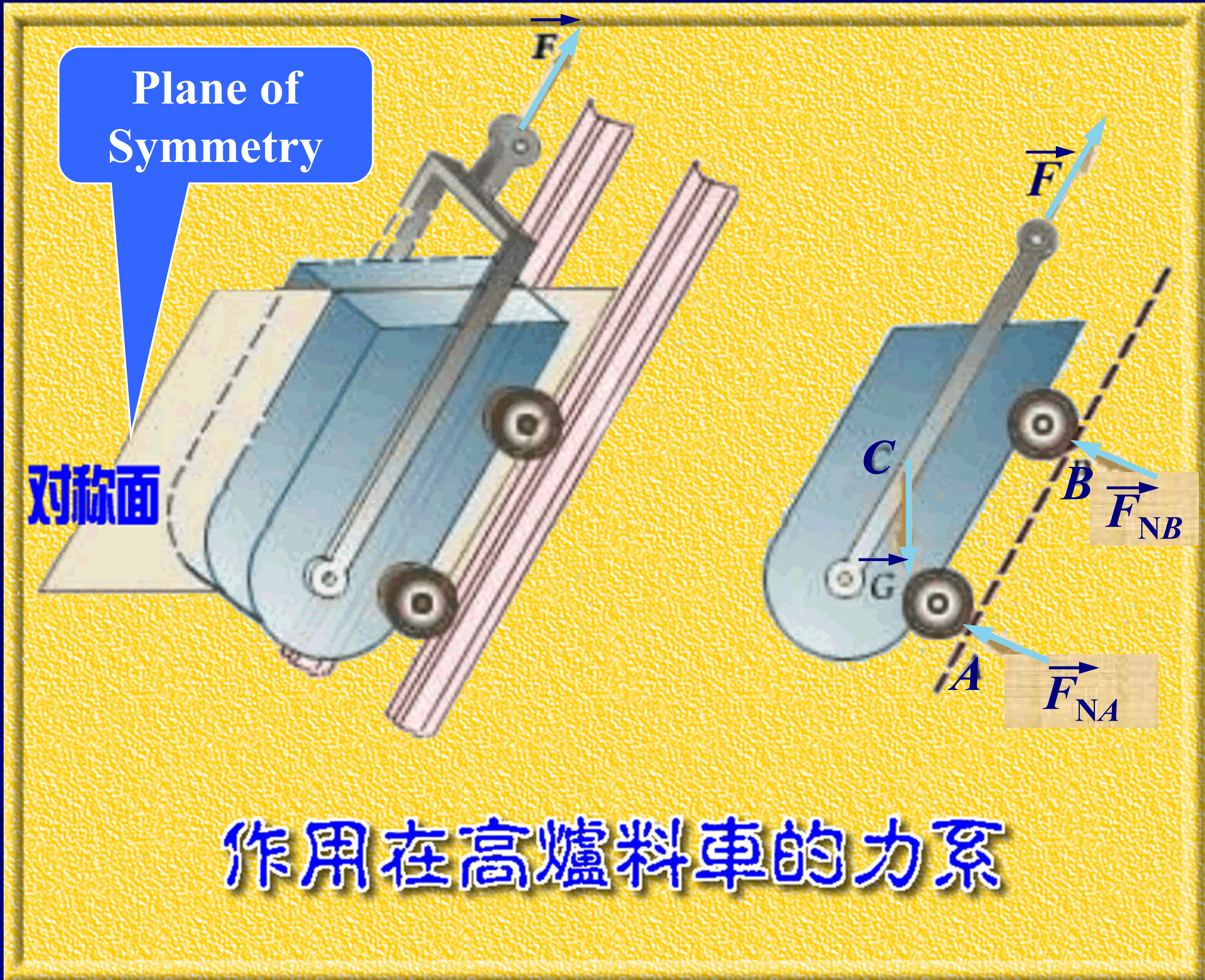
# General Planar Force System

# General Planar Force System
# 平面任意力系






作用在行驶汽车上的力系

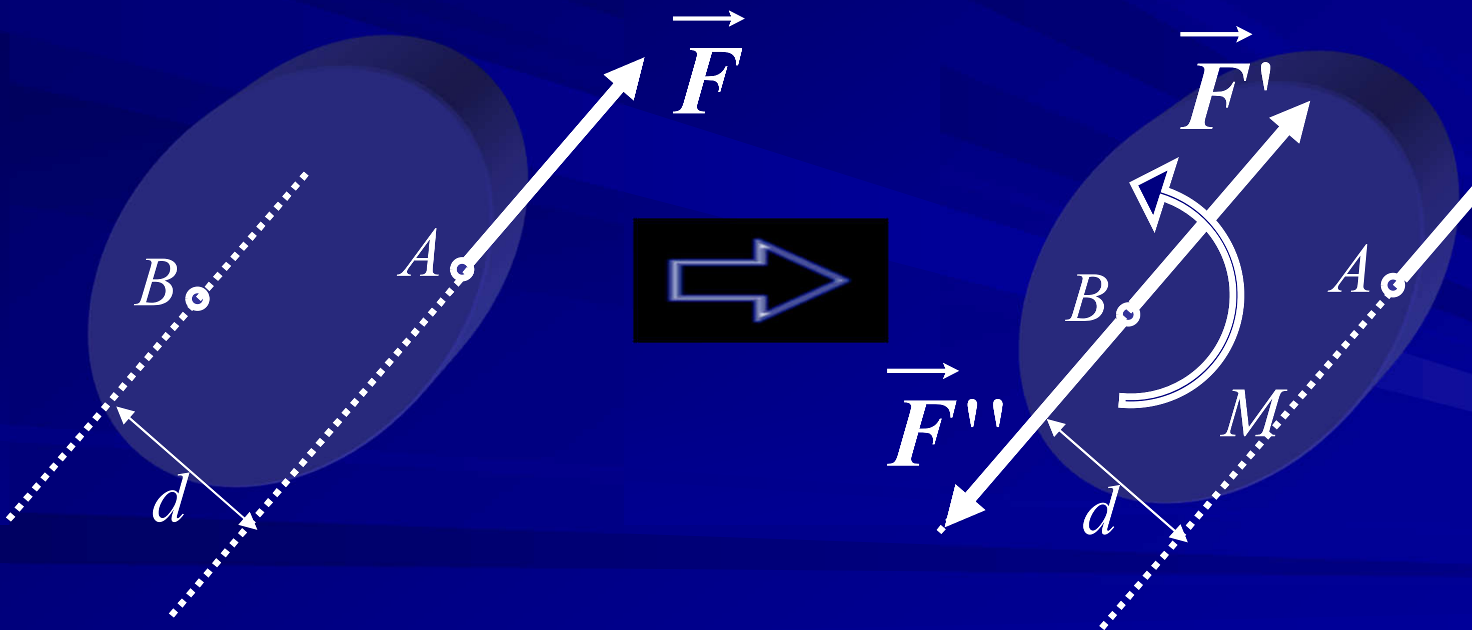


Plane of Symmetry
对称面
$\vec{F}$
$\vec{F}$
C
G
B
$\vec{F}_{NB}$
A
$\vec{F}_{NA}$
作用在高爐料車的力系

# §1 平面任意力系向平面内一点简化

## 一、　力的平移定理

作用于刚体上$A$点的力 $\vec{F}$ 可平行移到任意一点 $B$，但必须附加一力偶，此附加力偶的矩等于原力对新作用点 $B$ 的矩。




$$M = Fd$$

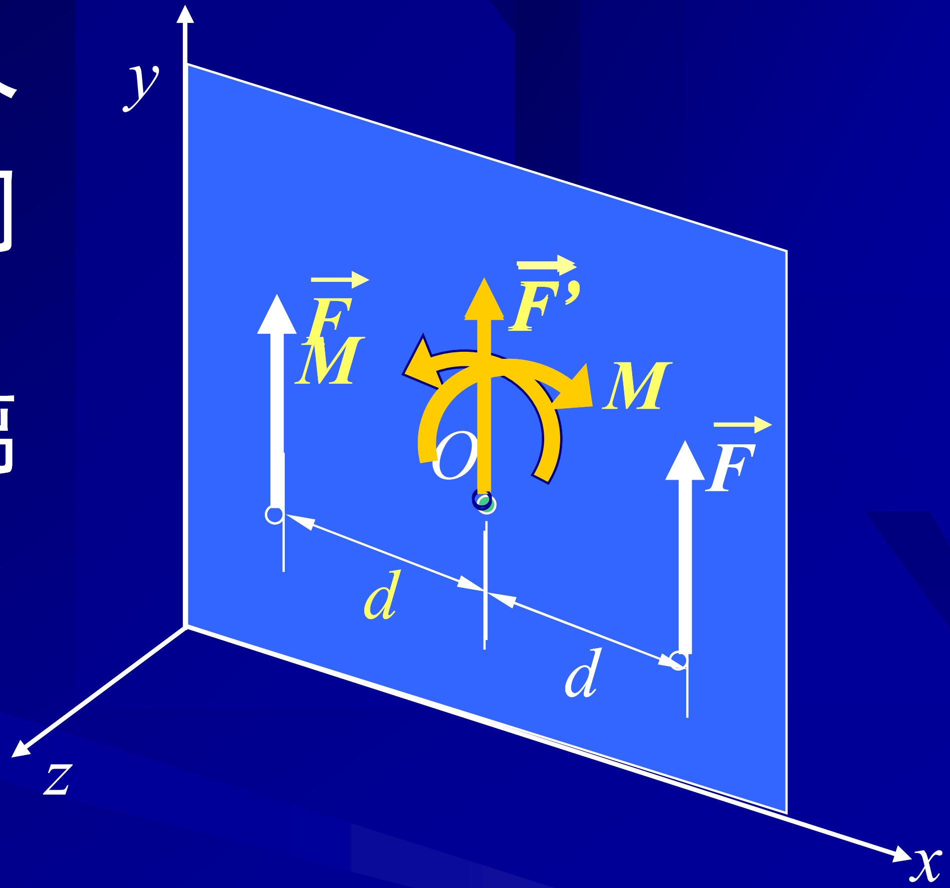
$$\vec{F}' = -\vec{F}'' = \vec{F}$$

# 逆过程：

- 平面内的一个力和一个力偶总可以等效地被同平面内的一个力替换，但作用线平移一段距离

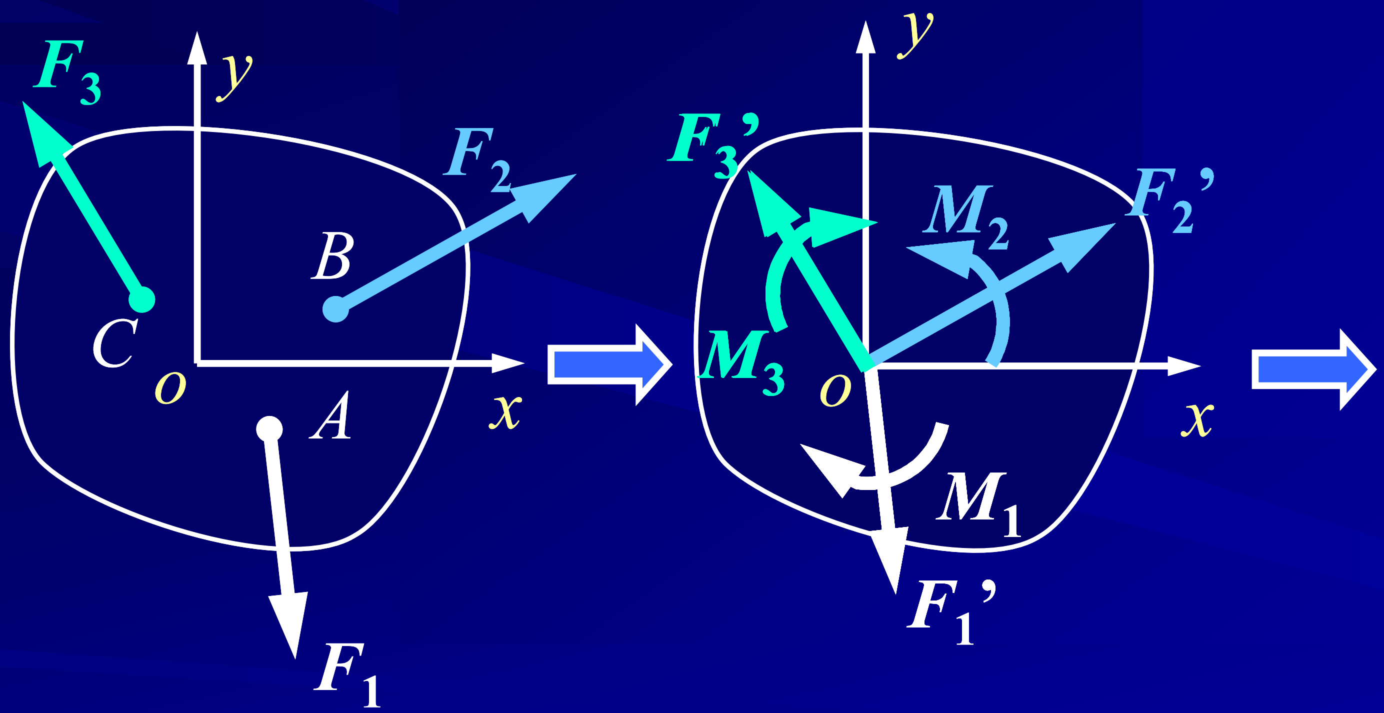
$$d = \frac{|M|}{F}$$

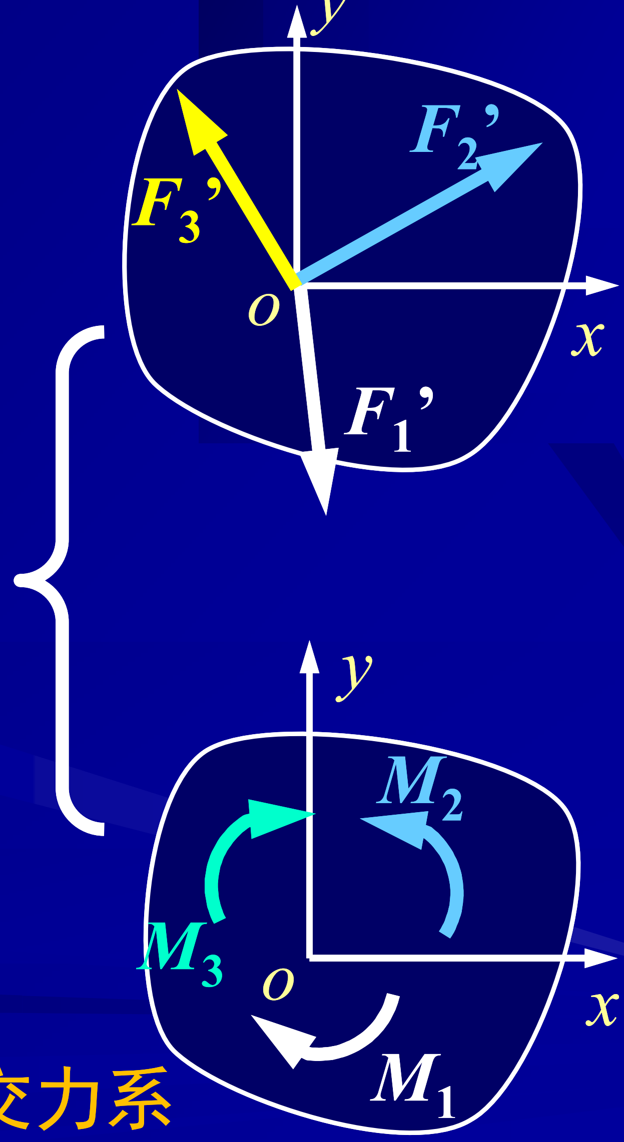
位置由 $M$ 的转向确定。



# 二、平面任意力系向作用面内一点简化

设刚体上作用三个力$F_1$、$F_2$和 $F_3$，它们组成平面任意力系，在平面内任意取一 $O$ 点，分别将三力向此点简化。



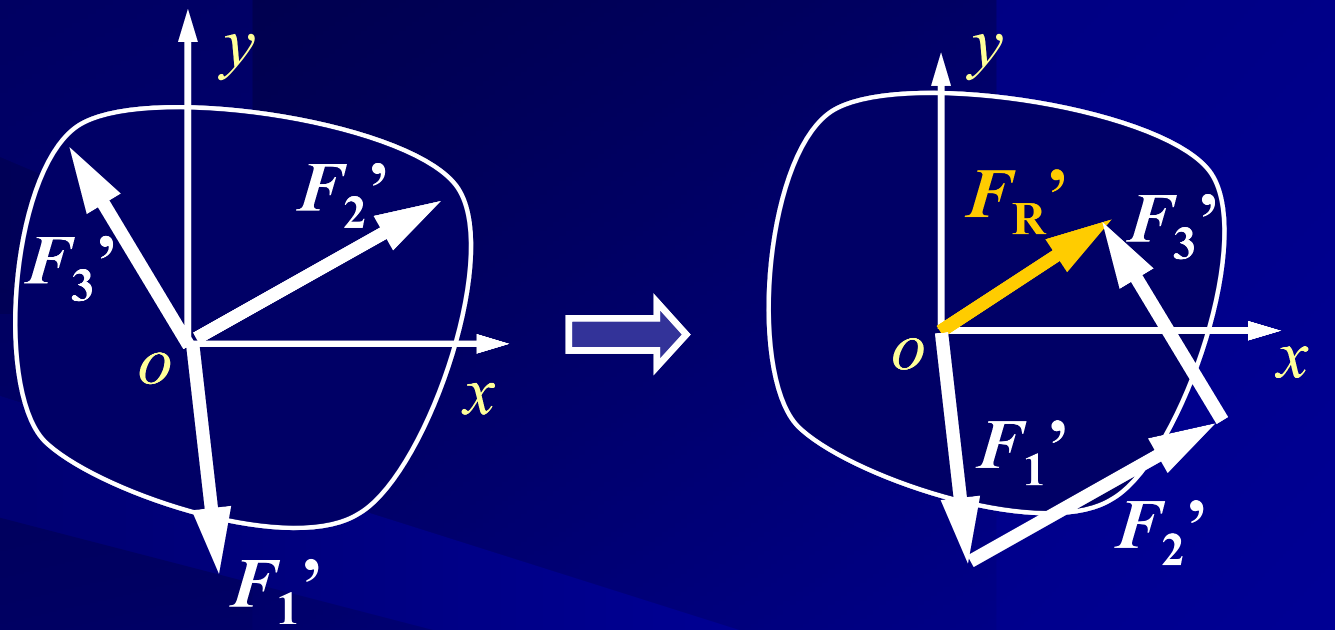




**可知：** 平面任意力系等效为两个简单力系：

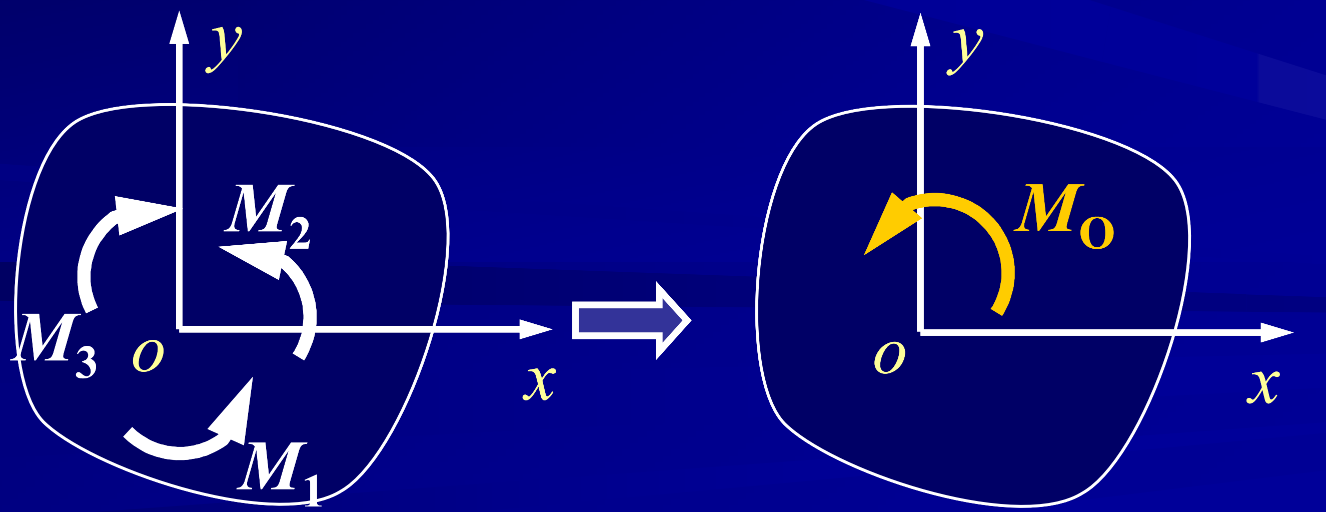
Planar Concurrent Force System 平面汇交力系
and Planar system of Couples 平面力偶系

# 二、平面任意力系向作用面内一点简化

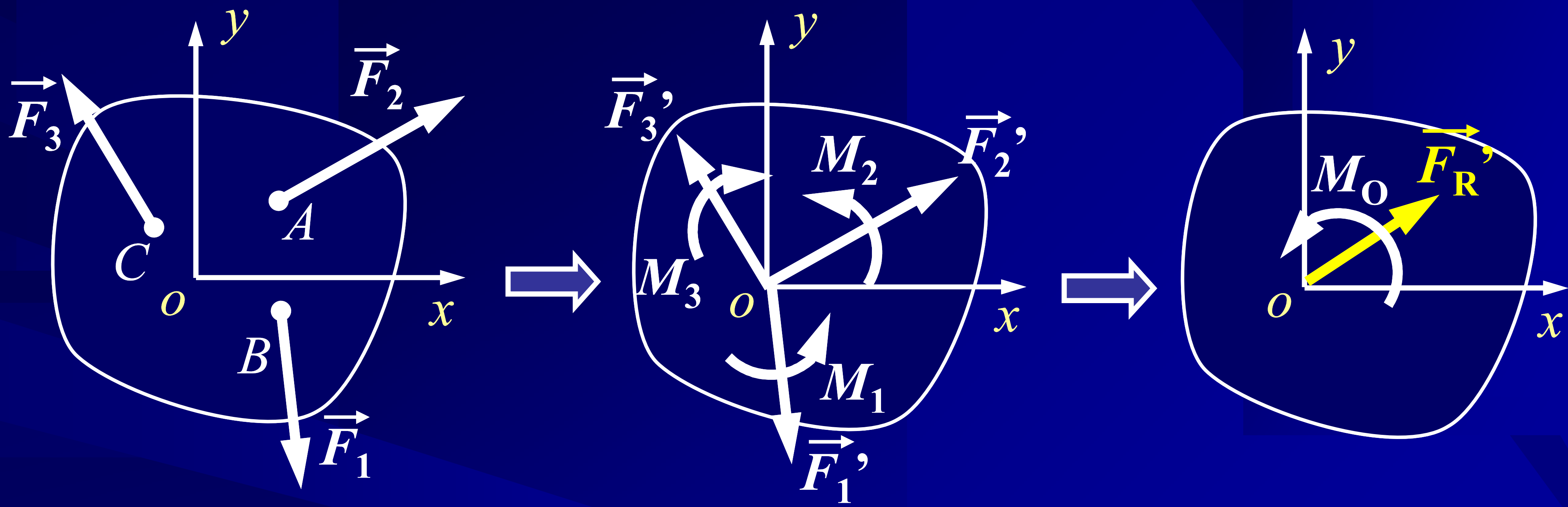
- 平面汇交力系的简化结果是过汇交点的一个合力！




- 平面力偶系的简化结果是一个合力偶！



# 二、平面任意力系向作用面内一点简化




- O 点称为简化中心；

$$\vec{F}'_R = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 \qquad M_O = M_1 + M_2 + M_3$$

- 对于力的数目为 *n* 的平面任意力系，推广为：

$$\vec{F}'_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

力系的主矢

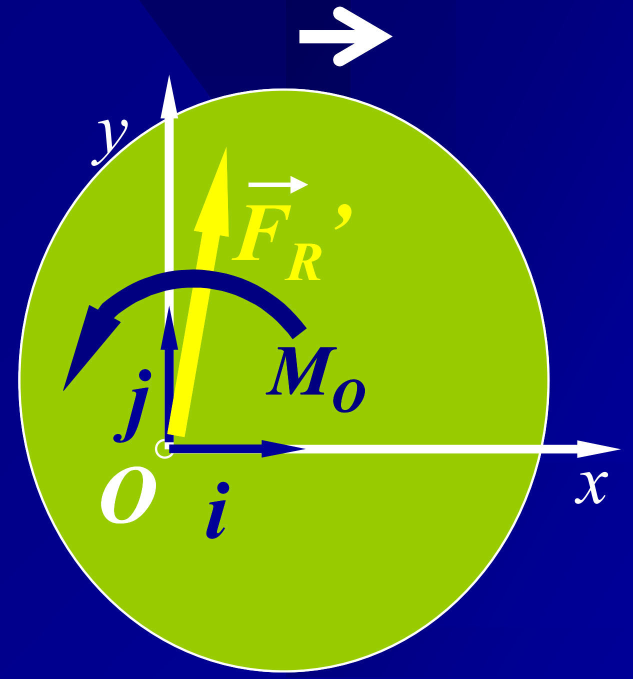
**Principal Vector**

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i)$$

力系的主矩

**Principal Moment**

## 简化结果：




- 平面任意力系向一点简化，可得一个力和一个力偶，力的大小和方向等于主矢的大小和方向，力作用线通过简化中心；力偶的矩等于主矩。

- 力系的主矢的解析表达式为：

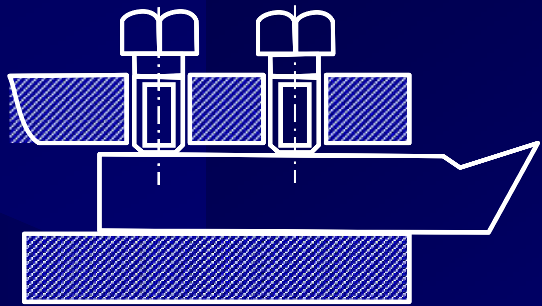
$$\vec{F}'_R = \vec{F}'_{Rx} + \vec{F}'_{Ry} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j}$$

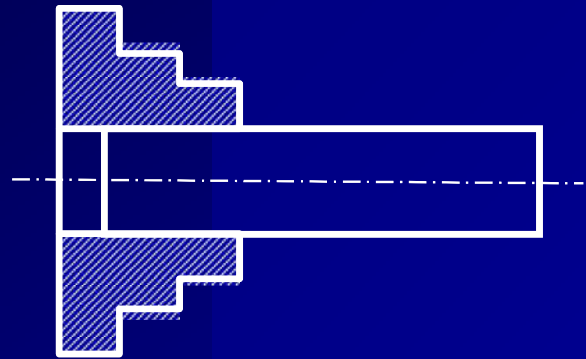
$$F'_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

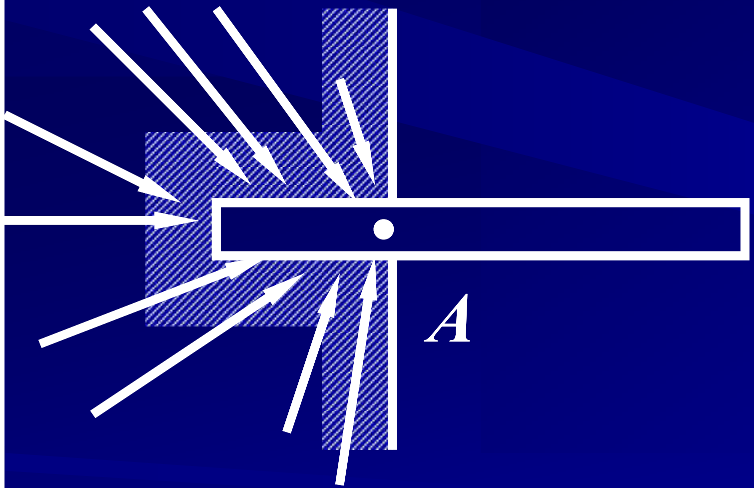
**注意**：主矢与简化中心无关，一般情况下主矩与简化中心有关。

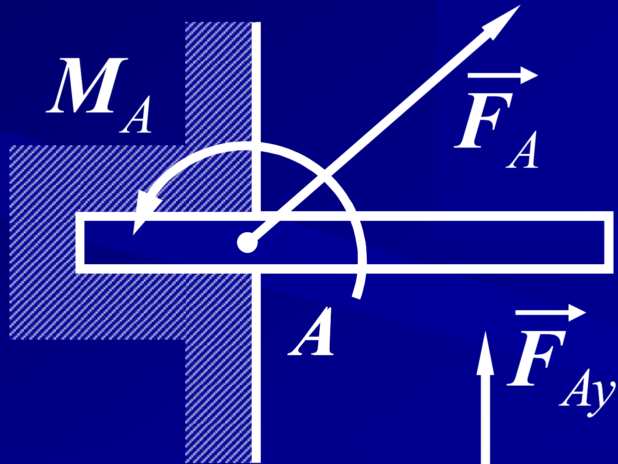
$$\cos(\vec{F}'_R, \vec{i}\,) = \frac{\sum F_x}{F_R'}; \quad \cos(\vec{F}'_R, \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'}$$

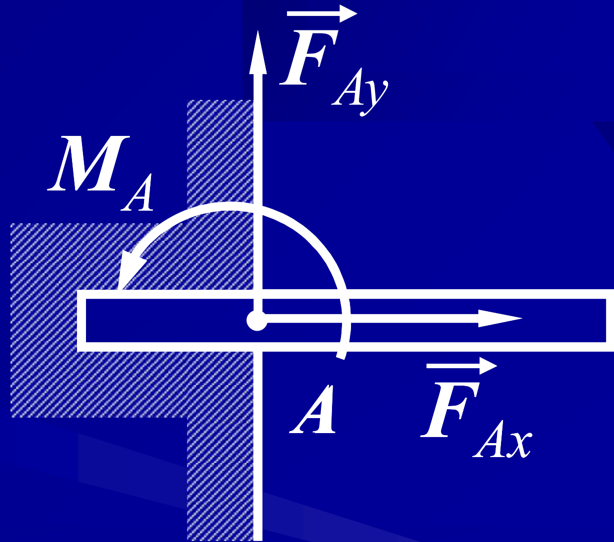
# • Fixed Support / Built-in support





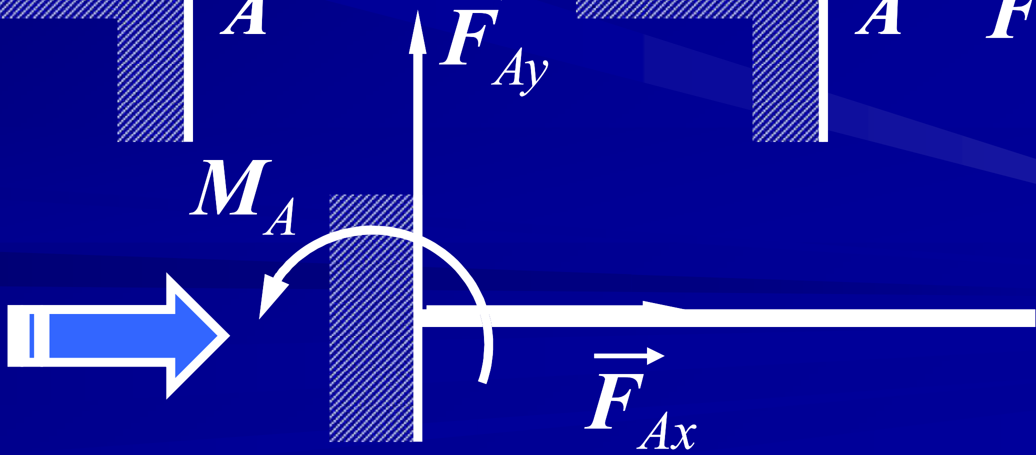



- **Cantilever Beam**

  悬臂梁



# §3-2 平面力系的简化结果分析

- 主矢不等于零，即 $F_R' \neq 0$

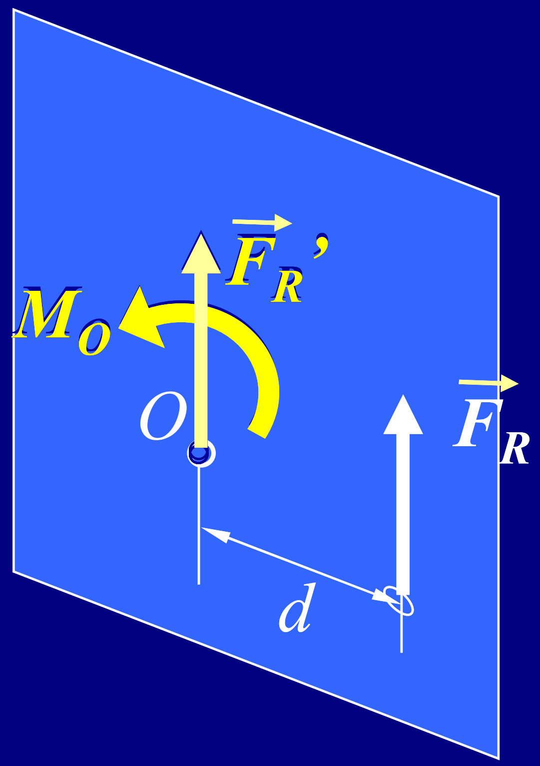
| 主矩 | 合成结果 | 说　　明 |
| --- | --- | --- |
| $M_O = 0$ | 合力 $F_R'$ | **此力为原力系的合力，合力的作用线通过简化中心。** |
| $M_O \neq 0$ | 合力 $F_R'$<br>大小等于主矢 | **此力为原力系的合力，合力的作用线距简化中心的距离** $d = \dfrac{\lvert M_O \rvert}{F_R}$ |

# • 合力矩定理

- 平面任意力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的代数和。

证：由前表的第二种情况可知：

$$d = \frac{|M_O|}{F_R}$$




**合力对 O 点的矩为：**

$$M_O(\vec{F}_R) = F_R d = M_O$$

$$\therefore \quad M_O(\vec{F}_R) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i)$$

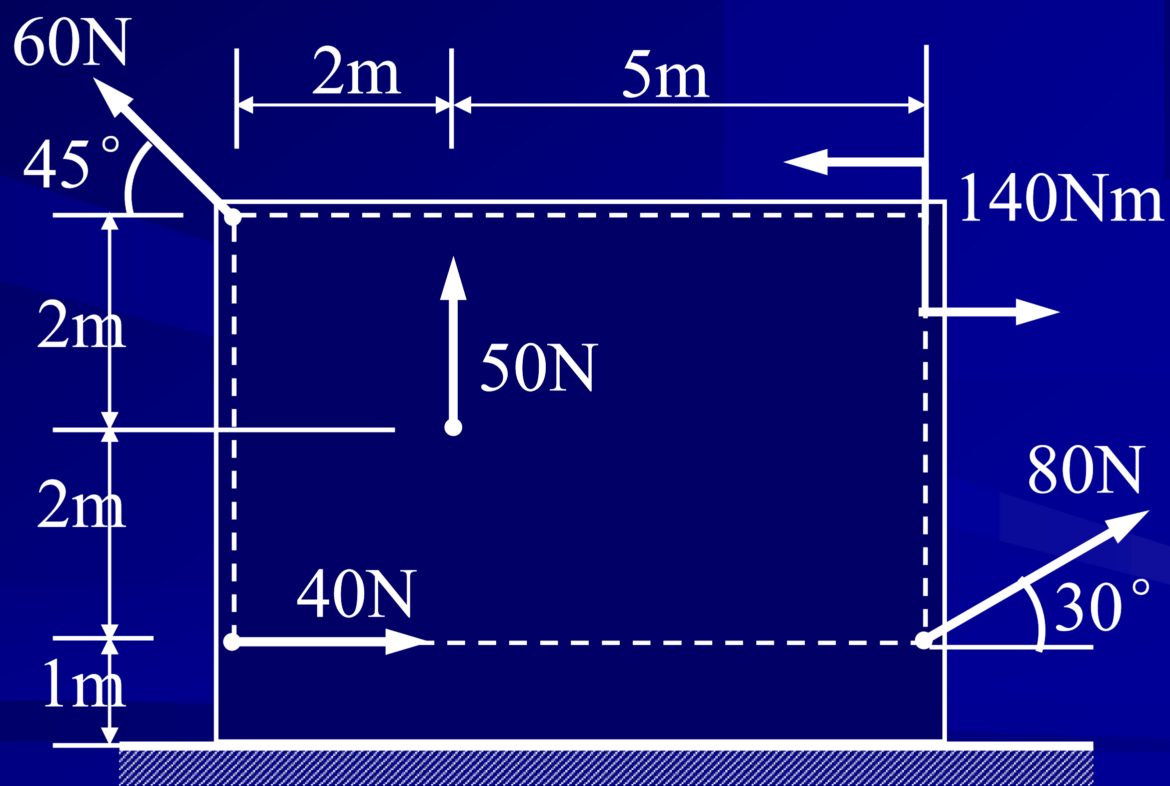
1687年由法国科学家伐里农在平面力系中提出，又名伐里农定理

# 平面力系的简化结果分析（二）

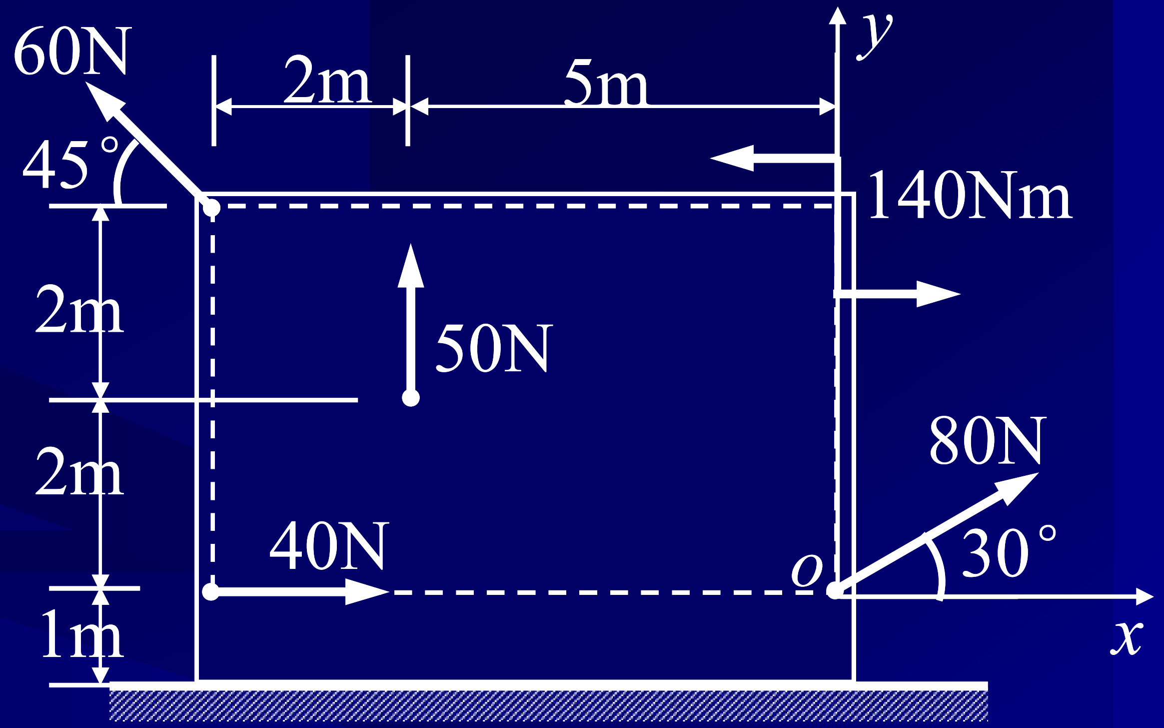
- 主矢等于零，即 $F_R{}' = 0$

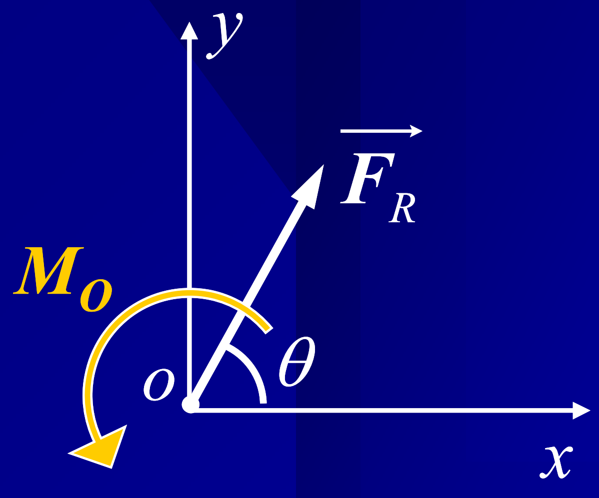
| 主矩 | 合成结果 | 说　　明 |
|---|---|---|
| $M_O \neq 0$ | 合力偶 | 此力偶为原力系的合力偶，由简化结果彼此等效知：此情况下，主矩与简化中心 $O$ 无关。 |
| $M_O = 0$ | 平 衡 | § 3-3 节将重点讨论。 |

例2　矩形块上作用有四个力和一个力偶，其大小方向与作用位置如图。求力系简化的最后结果。




NEXT



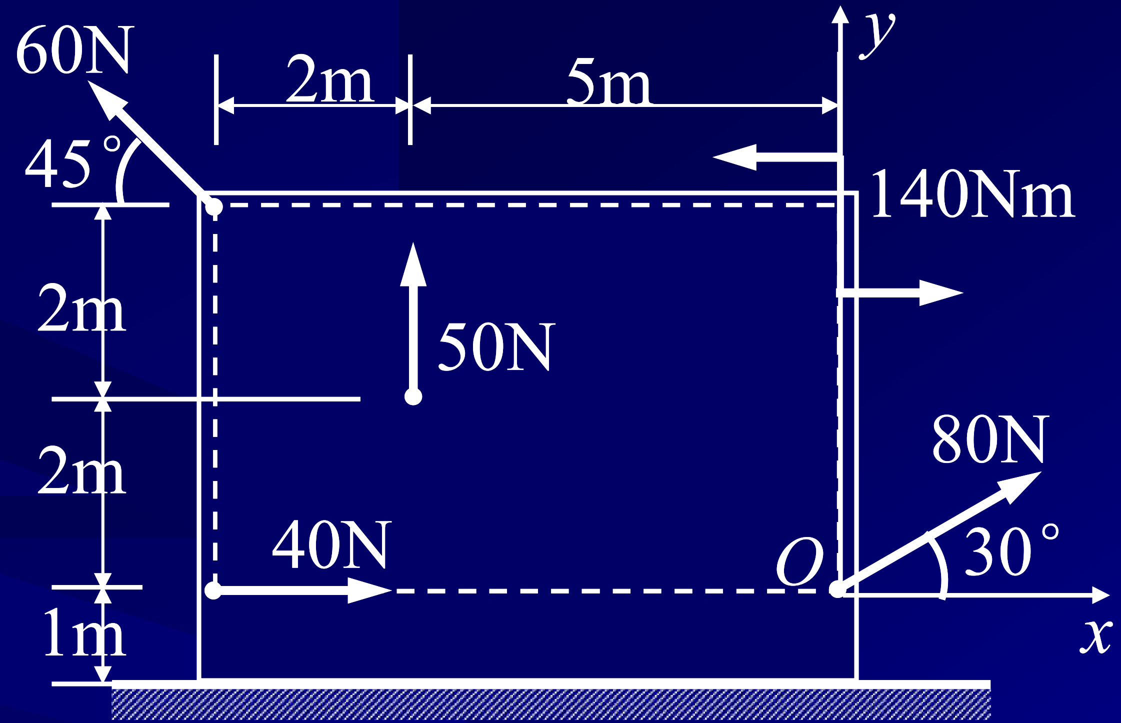

解：选$O$为简化中心，建立坐标系$Oxy$。力系的主矢

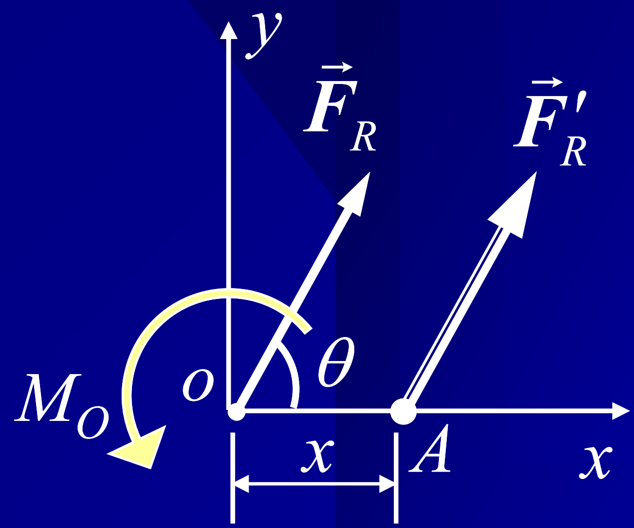
$$\begin{cases} F_{Rx} = \sum F_{ix} = 80\cos 30° + 40 - 60\cos 45° = 66.9\text{N} \\ F_{Ry} = \sum F_{iy} = 80\sin 30° + 50 + 60\sin 45° = 132.4\text{N} \end{cases}$$

$$F_R = \sqrt{66.9^2 + 132.4^2}\,\text{N} = 148.3\text{N}, \qquad \theta = \arctan\frac{132.4}{66.9} = 63.2°$$

力系对O的主矩$M_O = 140 - 50\times 5 + 60\sin 45°\times 4 - 60\cos 45°\times 7$

$$= -237.3\text{N}\cdot\text{m}$$




$$F_R = \sqrt{66.9^2 + 132.4^2}\,\text{N} = 148.3\text{N} \qquad \theta = \arctan\frac{132.4}{66.9} = 63.2°$$

$$M_O = -237.3\text{N}\cdot\text{m}$$

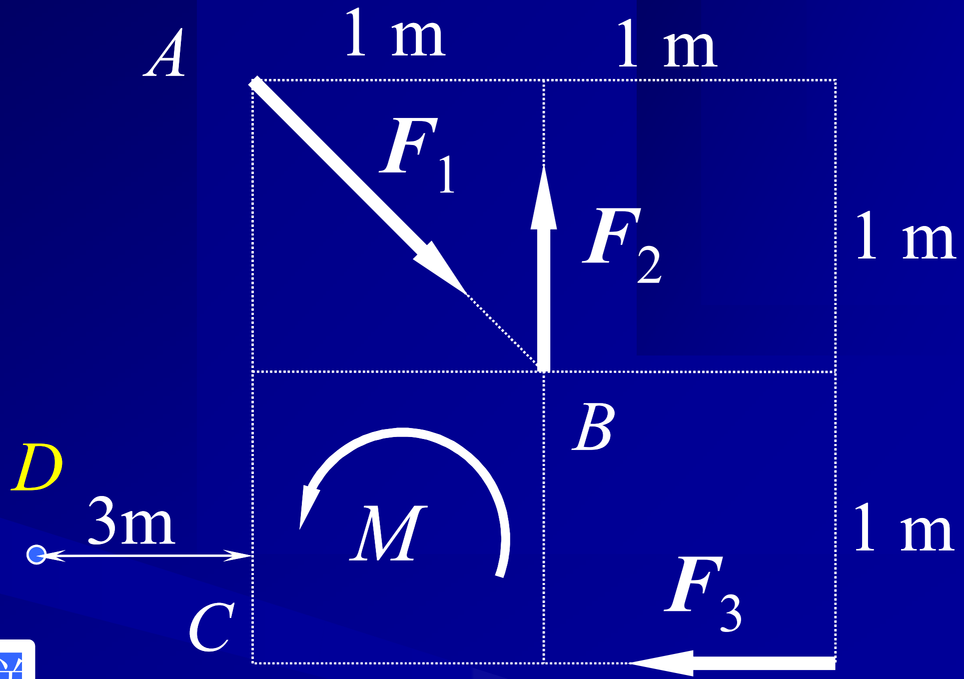
平面力系的主矢主矩均不等于零，所以可进一步简化为一合力。

合力的作用线与$x$轴交点$A$的位置：

由合力矩定理：$xF_{Ry} = M_O$ $\qquad x = \dfrac{M_O}{F_{Ry}} = \dfrac{237.3\text{N}\cdot\text{m}}{132.4\text{N}} = -1.792\ \text{m}$

例3-2　一平面力系如图，已知 $F_1=\sqrt{2}\,\text{kN}$　$M=2\,\text{kNm}$，$F_2=F_3=1\,\text{kN}$，求该力系向$D$点的简化结果。

解：




$$\sum F_x = F_1\frac{1}{\sqrt{2}} - F_3 = 0$$

$$\sum F_y = F_2 - F_1\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

只剩一个合力偶，与简化中心位置无关

即，主矢 $F_R{'}=0$，这样可知主矩与简化中心 $D$ 的位置无关，以 $B$ 点为简化中心有：

$M_D = M_B = M - F_3(1) = 1\ \text{kN m}$，主矩 $M_D = 1\ \text{kNm}$

# §3 平面力系的平衡条件

- 平面任意力系平衡的充分必要条件是力系的主矢和力系对任意点的主矩都等于零。

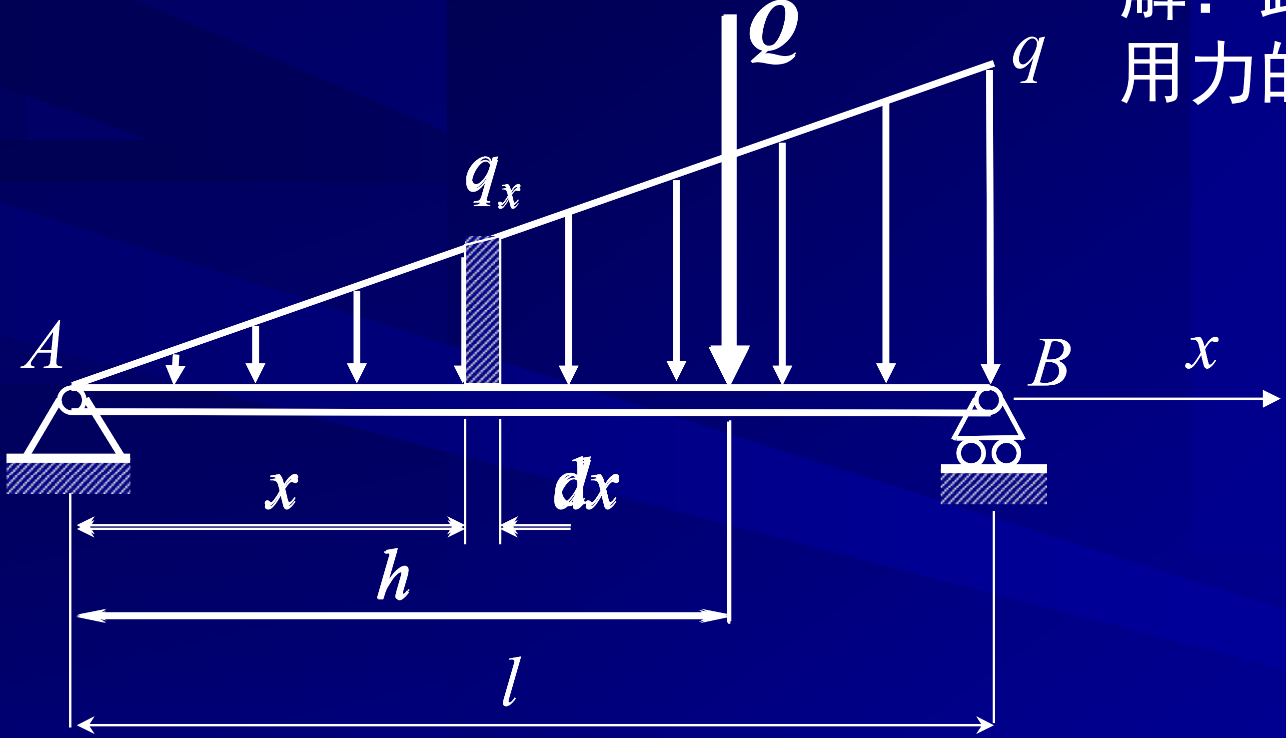
即： $\vec{F}_R = 0,\quad M_O = 0$

$$F_R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} \qquad M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i)$$

得平衡的解析条件：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0 \end{aligned}\right\}$$

{*****} 水平梁 $AB$ 受三角形分布载荷作用，载荷的最大载荷集度为 $q$，梁长 $l$ 。求合力作用线的位置。




解：距 $A$ 端为 $x$ 的微段 d$x$上作用力的大小为 $q_x\,\mathrm{d}x$

其中 $q_x = q\,x\,/\,l$

设合力$P$ 到 $A$点的距离 $h$

合力的大小为

$$Q = \int_0^l q_x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}ql$$

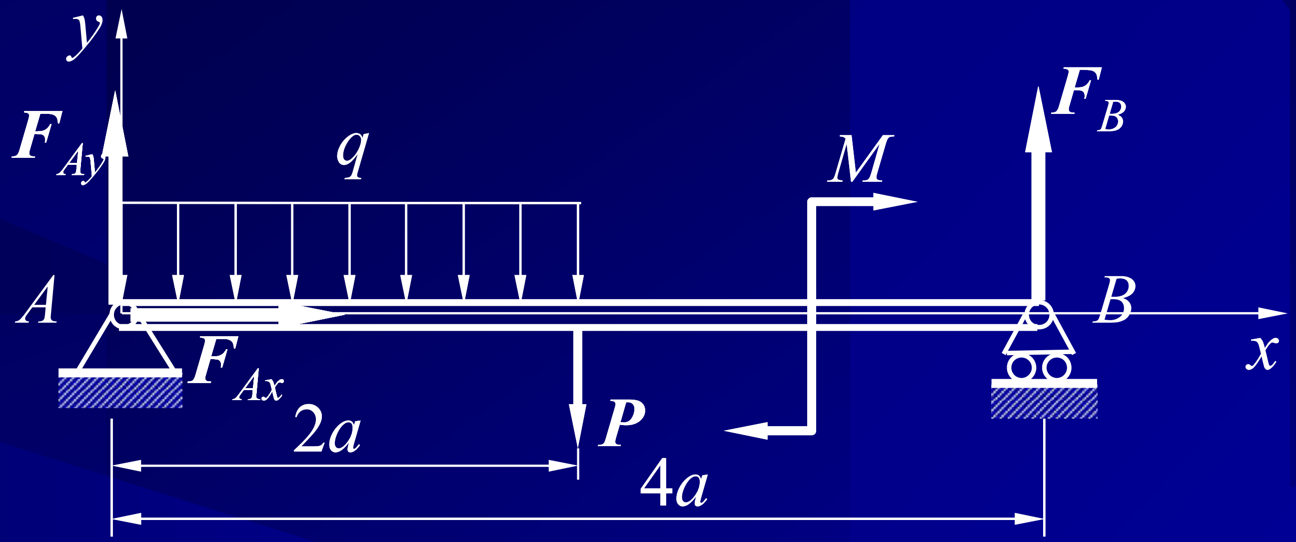
三角形面积

- 合力对 $A$ 点的矩可由合力矩定理得：

$$Qh = \int_0^l q_x x\,\mathrm{d}\,x = \frac{ql^2}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3}l$$

作用线过几何中心

**例3**　自重不计的简支梁 $AB$ 受力如图，$M=Pa$。试求 $A$ 和 $B$ 支座的约束反力。




解：受力分析，　　取坐标轴如图。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0\,,\quad F_B(4a)-M-P(2a)-q(2a)(a)=0$$

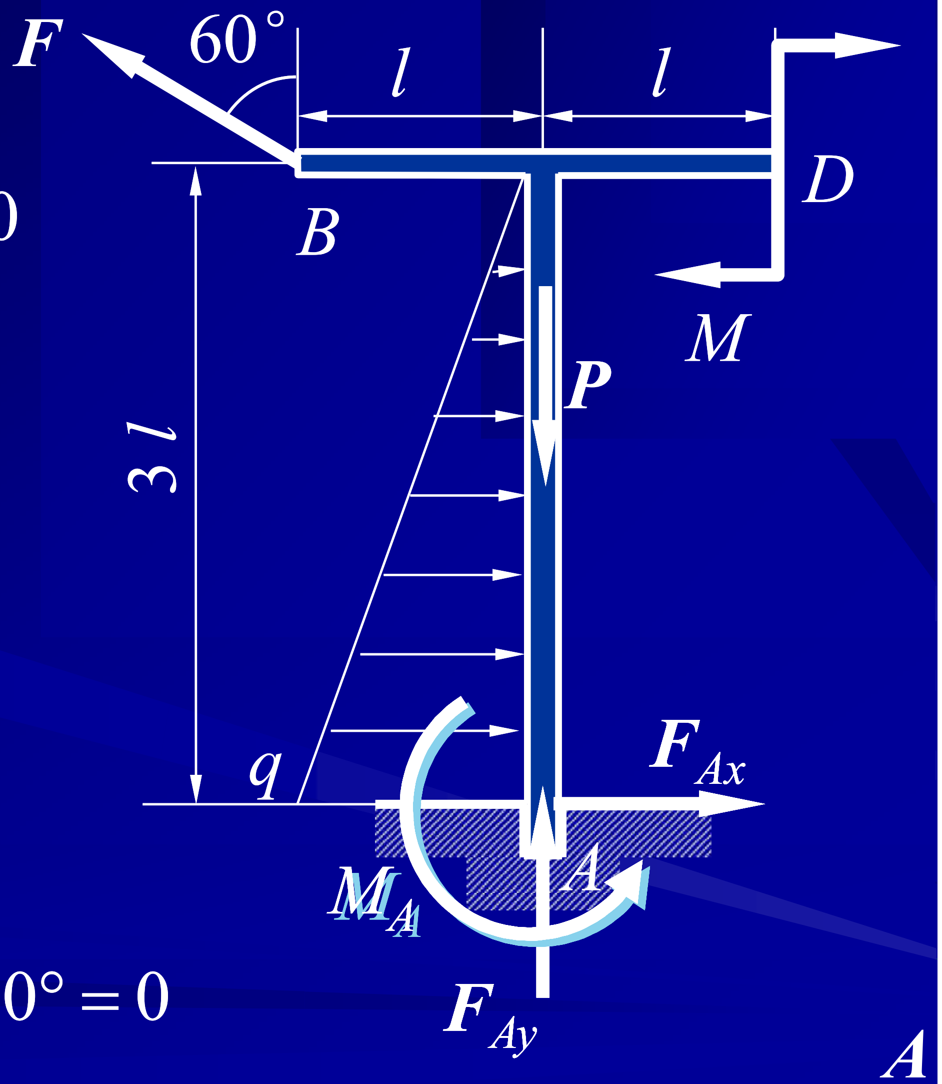
$$\boxed{F_B=\frac{3}{4}P+\frac{1}{2}qa}$$

$$\sum F_x=0\,,\quad \boxed{F_{Ax}=0}$$

$$\sum F_y=0\,,\quad F_{Ay}-q(2a)-P+F_B=0\,,\quad \boxed{F_{Ay}=\frac{P}{4}+\frac{3}{2}qa}$$

例 4　　自重为 $P=100$ kN 的 T 字形刚架，$l=1$m，$M=20$kNm，$F=400$ kN，$q=20$kN/m，试求固定端 $A$ 的约束反力。

解：研究 T 字形刚架，




$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+\frac{1}{2}q(3l)-F\sin 60^\circ=0$$

$$\boxed{F_{Ax}=316.4\ (\text{kN})}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-P+F\cos 60^\circ=0$$

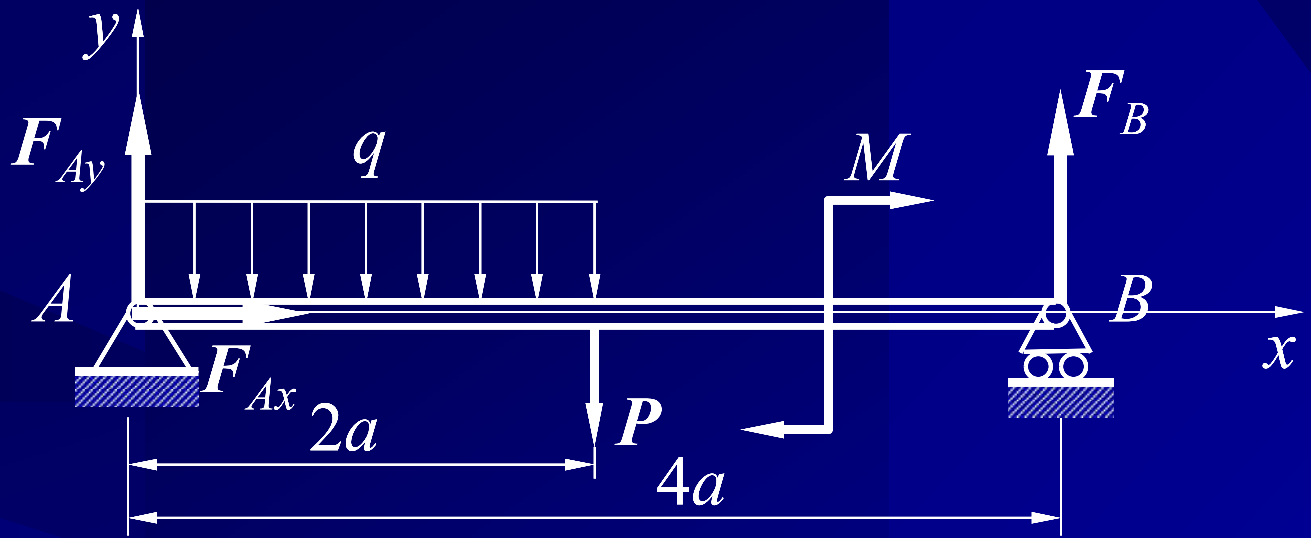
$$\boxed{F_{Ay}=-100\ (\text{kN})}$$

$$\sum M_A(\vec{F})=0,\ M_A-\frac{1}{2}q(3l)(l)-M$$

$$+F\sin 60^\circ(3l)-Fl\cos 60^\circ=0$$

$$\boxed{M_A=-789.2\ (\text{kNm})}$$

# 回忆例3　当我们更换第三个方程，结果相同。




解：受力分析，取坐标轴如图。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_B(4a) - M - P(2a) - q(2a)(a) = 0$$

$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad F_{Ay}(4a) - q(2a)(3a) - P(2a) + M = 0$$

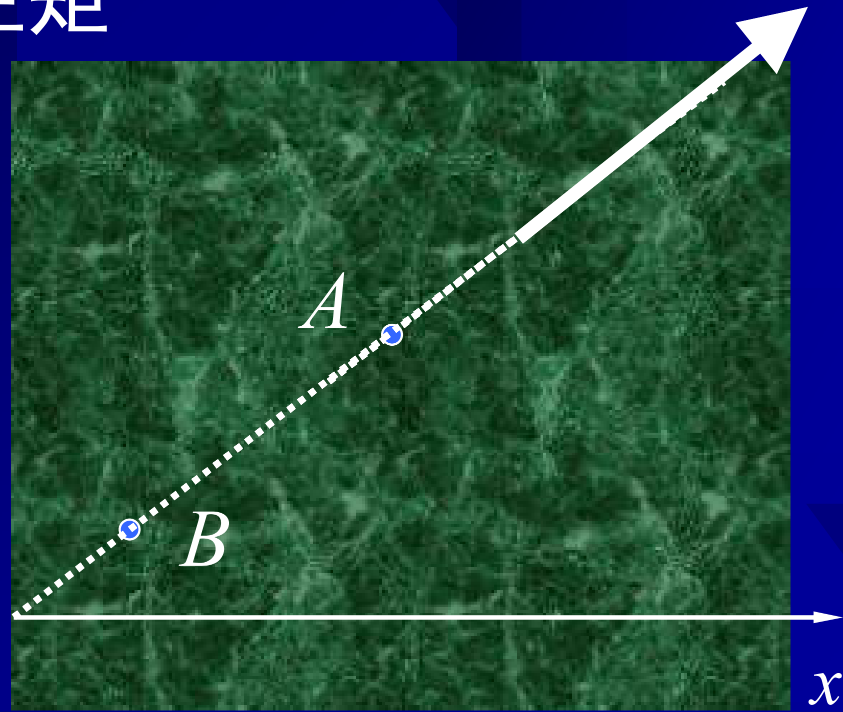
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - q(2a) - P - F_B = 0 \qquad F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$

- 为什么会有二力矩形式的平衡方程呢？

这是因为，如果力系对点$A$的主矩等于零，则系统有两种可能：

（1）平衡。

（2）经过$A$点的一个力。




如果力系对点$B$的主矩也同时等于零，则系统仍有两种可能：

（1）平衡。

（2）经过$A$点，同时又通过$B$点的一个力。

如果再加上$\sum F_x = 0$，那么力系如有合力则力垂直于$x$轴（此时往x轴投影自然为0），附加条件（x轴不得垂直于直线$AB$），完全排除力系简化为一个合力的可能性，故此力系必为平衡力系

# Three Types of Equilibrium Equations

| 形式 | 基本 | 二力矩 | 三力矩 |
|---|---|---|---|
| 平衡方程 | $\sum F_x = 0$<br>$\sum F_y = 0$<br>$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$ | $\sum F_x = 0$<br>$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$<br>$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$ | $\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$<br>$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$<br>$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0$ |
| 限制条件 | 只要 $x$ 轴不平行 $y$ 轴 | 只要 $AB$ 联线不与 $x$ 轴垂直<br>（排除了力系简化为一个合力的可能性） | 只要 $A$、$B$、$C$ 三点不共线<br>（若共线矩方程满足但合力可以不为0） |

# 中秋国庆

双节同庆